2005年度ソフトウェア基礎科学 レポート課題 正答例

課題1

1. $(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)a$ **を最後まで簡約せよ。各簡約の導出木も書き下せ。**

$$\begin{array}{lll} & (\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)a & \\ \to & (\lambda y.y)(\lambda z.z)a & (1) \\ \to & (\lambda z.z)a & (2) \\ \to & a & (3) \end{array}$$

(1) の導出木

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\lambda x.x)(\lambda y.y) \to \lambda y.y}\ \text{(R-App)}}{(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z) \to (\lambda y.y)(\lambda z.z)}\ \text{(R-App1)}}{(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)a \to (\lambda y.y)(\lambda z.z)a}\ \text{(R-App1)}$$

注: 次の導出木は誤っている。(問: なぜか?)

$$\dfrac{\dfrac{}{(\lambda x.x)(\lambda y.y) \to \lambda y.y}\ \text{(R-App)}}{(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)a \to (\lambda y.y)(\lambda z.z)a}\ \text{(R-App1)}$$

(2) の導出木

$$\dfrac{\dfrac{}{(\lambda y.y)(\lambda z.z) \to \lambda z.z}\ \text{(R-App)}}{(\lambda y.y)(\lambda z.z)a \to (\lambda z.z)a}\ \text{(R-App1)}$$

(3) の導出木

$$\dfrac{}{(\lambda z.z)a \to a}\ \text{(R-App)}$$

注: $\to$ はあくまで**1ステップの**簡約関係であるから、$(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)a \to a$ とするのは誤りである。$(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)a \to^* a$ ならば良い。

2. $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$ **を最後まで簡約せよ。各簡約の導出木も書き下せ。**

$$\begin{array}{lll} & (\lambda x.xx)(\lambda y.y) & \\ \to & (\lambda y.y)(\lambda y.y) & (1) \\ \to & \lambda y.y & (2) \end{array}$$

(1) の導出木

$$\dfrac{}{(\lambda x.xx)(\lambda y.y) \to (\lambda y.y)(\lambda y.y)}\ \text{(R-App)}$$

(2) の導出木

$$\dfrac{}{(\lambda y.y)(\lambda y.y) \to \lambda y.y}\ \text{(R-App)}$$

注: 上と同じく、$(\lambda x.xx)(\lambda y.y) \to \lambda y.y$ と書くのは誤りである。

課題 2

型の保存の証明を完成させよ。

$\Gamma \vdash e : \tau$ として、$e \to e'$ の導出についての帰納法により、$\Gamma \vdash e' : \tau$ を示す（簡約規則として R-Lam を考えないならば Γ は空としても良い)。

導出の最後の規則が R-App1 だった場合 $e = e_1 e_2$ かつ $e' = e_1' e_2$ で、$e \to e'$ の導出は

$$\frac{e_1 \to e_1'}{e_1 e_2 \to e_1' e_2}\ \text{(R-App1)}$$

$\Gamma \vdash e : \tau$ の導出は

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}\ \text{(T-App)}$$

という形をしているはずである。$e_1 \to e_1'$ かつ $\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau$ だから、帰納法の仮定より $\Gamma \vdash e_1' : \tau' \to \tau$。よって T-App より

$$\frac{\Gamma \vdash e_1' : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1' e_2 : \tau}\ \text{(T-App)}$$

と $\Gamma \vdash e' : \tau$ が導出できる。

導出の最後の規則が R-App2 だった場合 $e = e_1 e_2$ かつ $e' = e_1 e_2'$ で、$e \to e'$ の導出は

$$\frac{e_2 \to e_2'}{e_1 e_2 \to e_1 e_2'}\ \text{(R-App2)}$$

$\Gamma \vdash e : \tau$ の導出は

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}\ \text{(T-App)}$$

という形をしているはずである。$e_2 \to e_2'$ かつ $\Gamma \vdash e_2 : \tau'$ だから、帰納法の仮定より $\Gamma \vdash e_2' : \tau'$。よって T-App より

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2' : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2' : \tau}\ \text{(T-App)}$$

と $\Gamma \vdash e' : \tau$ が導出できる。

導出の最後の規則が R-App だった場合 $e = (\lambda x.e_1)e_2$ かつ $e' = [e_2/x]e_1$ で、$e \to e'$ の導出は

$$\frac{}{(\lambda x.e_1)e_2 \to [e_2/x]e_1}\ \text{(R-App)}$$

$\Gamma \vdash e : \tau$ の導出は

$$\frac{\dfrac{\Gamma, x : \tau' \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.e_1 : \tau' \to \tau}\ \text{(T-Abs)} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash (\lambda x.e_1)e_2 : \tau}\ \text{(T-App)}$$

という形をしているはずである。$\Gamma, x : \tau' \vdash e_1 : \tau$ かつ $\Gamma \vdash e_2 : \tau'$ だから、代入補題より $\Gamma \vdash [e_2/x]e_1 : \tau$ つまり $\Gamma \vdash e' : \tau$。

導出の最後の規則が R-Lam だった場合　$e = \lambda x.e_0$ かつ $e' = \lambda x.e_0'$ で、$e \to e'$ の導出は

$$\frac{e_0 \to e_0'}{\lambda x.e_0 \to \lambda x.e_0'}\ (\text{R-App2})$$

$\Gamma \vdash e : \tau$ の導出は、$\tau = \tau_1 \to \tau_2$ で

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash e_0 : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.e_0 : \tau_1 \to \tau_2}\ (\text{T-App})$$

という形をしているはずである。$e_0 \to e_0'$ かつ $\Gamma, x : \tau_1 \vdash e_0 : \tau_2$ だから、帰納法の仮定より $\Gamma, x : \tau_1 \vdash e_0' : \tau_2$。
よって T-App より

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash e_0' : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.e_0' : \tau_1 \to \tau_2}\ (\text{T-App})$$

と $\Gamma \vdash e' : \tau$ が導出できる。

注:　「$e \to e'$ の導出についての帰納法」および「導出の最後の規則による場合わけ」であるから、「$e = e_1 e_2$ の場合」ないし「$e = e_1 e_2$ で e_1 が値の場合」といった場合わけは意味がない。

課題 3

$\texttt{let}\ p = \lambda x.(x, x)\ \texttt{in}\ (p\ 3, p\ \texttt{"abc"})$ の型つけの導出木を書き下せ。

$\Gamma = p : \forall\alpha.\ \alpha \to \alpha \times \alpha$ とおいて

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (\text{T-Var}) \quad \cfrac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (\text{T-Var})}{x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}\ (\text{T-Pair})}{\vdash \lambda x.(x, x) : \alpha \to \alpha \times \alpha}\ (\text{T-Abs}) \quad \cfrac{\Delta_1 \quad \Delta_2}{\Gamma \vdash (p\ 3, p\ \texttt{"abc"}) : (\texttt{int} \times \texttt{int}) \times (\texttt{string} \times \texttt{string})}\ (\text{T-Pair})}{\vdash \texttt{let}\ p = \lambda x.(x, x)\ \texttt{in}\ (p\ 3, p\ \texttt{"abc"}) : (\texttt{int} \times \texttt{int}) \times (\texttt{string} \times \texttt{string})}\ (\text{T-Let})$$

Δ_1 の部分は

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma(p) = \forall\alpha.\ \alpha \to \alpha \times \alpha}{\Gamma \vdash p : \texttt{int} \to \texttt{int} \times \texttt{int}}\ (\text{T-Var}) \quad \cfrac{}{\Gamma \vdash 3 : \texttt{int}}\ (\text{T-Int})}{\Gamma \vdash p\ 3 : \texttt{int} \times \texttt{int}}\ (\text{T-App})$$

Δ_2 の部分は

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma(p) = \forall\alpha.\ \alpha \to \alpha \times \alpha}{\Gamma \vdash p : \texttt{string} \to \texttt{string} \times \texttt{string}}\ (\text{T-Var}) \quad \cfrac{}{\Gamma \vdash \texttt{"abc"} : \texttt{string}}\ (\text{T-String})}{\Gamma \vdash p\ \texttt{"abc"} : \texttt{string} \times \texttt{string}}\ (\text{T-App})$$

注:　そもそも型を間違えた者は、Objective Caml で `let p = fun x -> (x, x) in (p 3, p "abc")` を試すなどすれば、すぐにわかるので確かめてみよ。