2005年度「ソフトウェア基礎科学」試験問題
正答例

2006年2月3日
13:00–14:30
13:30以降途中退出可能

次のような抽象構文と small-step 簡約規則、型つけ規則を持つ言語について、問に答えよ。答は問の下か、指定された空欄に記入せよ。

$$
\begin{array}{llcll}
v & (\text{値}) & ::= & i & (\text{整数定数}) \\
 & & | & \mathit{fix}(\lambda f.\lambda x.e) & (f(x) = e \text{ なる再帰関数 } f) \\
e & (\text{式}) & ::= & v & (\text{値}) \\
 & & | & e_1 - e_2 & (\text{整数減算}) \\
 & & | & \mathit{if}\ e_1 \le e_2\ \mathit{then}\ e_3\ \mathit{else}\ e_4 & (\text{整数比較と条件分岐}) \\
 & & | & x & (\text{変数}) \\
 & & | & e_1 e_2 & (\text{関数適用}) \\
\tau & (\text{型}) & ::= & \mathit{int} & (\text{整数型}) \\
 & & | & \tau_1 \to \tau_2 & (\text{関数型})
\end{array}
$$

$$
\frac{i - j = k}{i - j \to k}(\text{R-Sub}) \qquad \frac{e_1 \to e_1'}{e_1 - e_2 \to e_1' - e_2}(\text{R-Sub1}) \qquad \frac{e \to e'}{v - e \to v - e'}(\text{R-Sub2})
$$

$$
\frac{i \le j}{\mathit{if}\ i \le j\ \mathit{then}\ e_3\ \mathit{else}\ e_4 \to e_3}(\text{R-IfTrue}) \qquad \boxed{\frac{i > j}{\mathit{if}\ i \le j\ \mathit{then}\ e_3\ \mathit{else}\ e_4 \to e_4}}(\text{R-IfFalse})
$$

$$
\frac{e_1 \to e_1'}{\mathit{if}\ e_1 \le e_2\ \mathit{then}\ e_3\ \mathit{else}\ e_4 \to \mathit{if}\ e_1' \le e_2\ \mathit{then}\ e_3\ \mathit{else}\ e_4}(\text{R-If1})
$$

氏名: ____________________　　学籍番号: ____________________

$$\frac{e_2 \to e_2'}{\mathit{if}\ \ v \le e_2\ \ \mathit{then}\ e_3\ \ \mathit{else}\ e_4 \to \mathit{if}\ \ v \le e_2'\ \ \mathit{then}\ e_3\ \ \mathit{else}\ e_4}\text{(R-If2)}$$

$$\frac{}{\mathit{fix}(\lambda f.\lambda x.e)v \to [v/x][\mathit{fix}(\lambda f.\lambda x.e)/f]e}\text{(R-App)}$$

$$\frac{e_1 \to e_1'}{e_1 e_2 \to e_1' e_2}\text{(R-App1)} \qquad \frac{e \to e'}{ve \to ve'}\text{(R-App2)}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash i : \mathit{int}}\text{(T-Int)} \qquad \frac{\Gamma, f : \tau_1 \to \tau_2, x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathit{fix}(\lambda f.\lambda x.e) : \tau_1 \to \tau_2}\text{(T-Fix)} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathit{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathit{int}}{\Gamma \vdash e_1 - e_2 : \mathit{int}}\text{(T-Sub)}$$

$$\boxed{\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathit{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathit{int} \quad \Gamma \vdash e_3 : \tau \quad \Gamma \vdash e_4 : \tau}{\Gamma \vdash \mathit{if}\ \ e_1 \le e_2\ \ \mathit{then}\ e_3\ \ \mathit{else}\ e_4 : \tau}}\text{(T-If)}$$

$$\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau}\text{(T-Var)} \qquad \boxed{\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}}\text{(T-App)}$$

問 1. 上の空欄 (R-IfFalse), (T-If), (T-App) に適切な規則を書き入れよ。

問 2. この言語において、正の整数 n を受け取り、1 から n までの整数の総和を返す関数 SUM を書け。（ヒント：足し算は引き算を組み合わせれば表すことができる。）

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SUM} & = & \mathit{fix}(\lambda f.\lambda n. \\ & & \quad \mathit{if}\ \ n \le 1\ \ \mathit{then}\ 1\ \ \mathit{else} \\ & & \quad f(n-1) - (0-n)) \end{array}$$

氏名: ______________________ 学籍番号: ______________________

問 3. その関数 SUM に対する型つけの導出木を書き下せ。

$\Gamma = f : \mathit{int} \to \mathit{int}, n : \mathit{int}$ と略記する。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma(n) = \mathit{int}}{\Gamma \vdash n : \mathit{int}}\,(\text{T-Var}) \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash 1 : \mathit{int}}\,(\text{T-Int}) \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash 1 : \mathit{int}}\,(\text{T-Int}) \quad \Delta}{\Gamma \vdash \mathit{if}\ n \leq 1\ \mathit{then}\ 1\ \mathit{else}\ f(n-1) - (0-n) : \mathit{int}}\,(\text{T-If})}{\vdash \mathit{fix}(\lambda f.\lambda n.\mathit{if}\ n \leq 1\ \mathit{then}\ 1\ \mathit{else}\ f(n-1) - (0-n)) : \mathit{int} \to \mathit{int}}\,(\text{T-Fix})
$$

Δ の部分は

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma(f) = \mathit{int} \to \mathit{int}}{\Gamma \vdash f : \mathit{int} \to \mathit{int}}\,(\text{T-Var}) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma(n) = \mathit{int}}{\Gamma \vdash n : \mathit{int}}\,(\text{T-Var}) \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash 1 : \mathit{int}}\,(\text{T-Int})}{\Gamma \vdash n - 1 : \mathit{int}}}{\Gamma \vdash f(n-1) : \mathit{int}}\,(\text{T-App}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash 0 : \mathit{int}}\,(\text{T-Int}) \quad \dfrac{\Gamma(n) = \mathit{int}}{\Gamma \vdash n : \mathit{int}}\,(\text{T-Var})}{\Gamma \vdash 0 - n : \mathit{int}}\,(\text{T-Sub})}{\Gamma \vdash f(n-1) - (0-n) : \mathit{int}}\,(\text{T-Sub})
$$

氏名: ____________________ 学籍番号: ____________________

問 4. 同じ関数 SUM に対し、関数適用 SUM(2) の 1 ステップごとの簡約を $e_1 \to e_2 \to e_3 \to \ldots \to v$ の形で最後まで書け。（各簡約の導出木は書かなくて良い。）

$\mathrm{SUM} = \mathit{fix}(\lambda f.\lambda n.\mathit{if}\ n \leq 1\ \mathit{then}\ 1\ \mathit{else}\ f(n-1) - (0-n))$ であることを思い出して、

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathrm{SUM}(2) \\
\to & \mathit{if}\ 2 \leq 1\ \mathit{then}\ 1\ \mathit{else}\ \mathrm{SUM}(2-1) - (0-2) \\
\to & \mathrm{SUM}(2-1) - (0-2) \\
\to & \mathrm{SUM}(1) - (0-2) \\
\to & (\mathit{if}\ 1 \leq 1\ \mathit{then}\ 1\ \mathit{else}\ \mathrm{SUM}(1-1) - (0-1)) - (0-2) \\
\to & 1 - (0-2) \\
\to & 1 - (-2) \\
\to & 3
\end{array}
$$

氏名: ____________________　学籍番号: ____________________

問 5. この言語において、次の性質はそれぞれ成り立つか。成り立つならば証明の概略を数行程度で述べ、成り立たないならば反例を挙げよ。ただし $\rightarrow^*$ は

$$\frac{}{e \rightarrow^* e}\text{(C-Ref)} \qquad \frac{e_1 \rightarrow e_2 \quad e_2 \rightarrow^* e_3}{e_1 \rightarrow^* e_3}\text{(C-Step)}$$

なる規則により定義される二項関係である。

1. 任意の e について、e が値でなければ、$e \rightarrow e'$ なる e' が最低一個は存在する。

   成り立たない。反例：$e = x$, $e = 1\ 2$ など。

2. 任意の e について、$\emptyset \vdash e : \mathit{int}$ ならば、$e \rightarrow^* v$ なる v が最低一個は存在する。（ただし $\emptyset$ は空の型環境を表す。）

   成り立たない。反例：$e = \mathit{fix}(\lambda f.\lambda x.fx)\ 3$ など。

3. 任意の e について、$e \rightarrow e'$ なる e' は高々一個しか存在しない。

   成り立つ。証明：$e \rightarrow e'$ かつ $e \rightarrow e''$ として、$e \rightarrow e'$ の導出に関する帰納法で、$e' = e''$ を示す。ただし「任意の v について、$v \rightarrow e'$ なる e' は存在しない」という補題を利用する。たとえば、$e \rightarrow e'$ の導出の最後の規則が (R-Sub2) だった場合は、$e = v - e_2$ の形で $e_2 \rightarrow e'_2$ かつ $e' = v - e'_2$。補題より、$e \rightarrow e''$ の導出の最後の規則も、(R-Sub1) ではなく (R-Sub2) しかありえない。よって $e_2 \rightarrow e''_2$ かつ $e'' = v - e''_2$。帰納法の仮定より $e'_2 = e''_2$ だから $e' = e''$。(R-Sub2) 以外のケースも同様。

4. 任意の e について、$e \rightarrow^* v$ なる v は高々一個しか存在しない。

   成り立つ。証明：$e \rightarrow^* v$ かつ $e \rightarrow^* v'$ ならば $v = v'$ であることを、$e \rightarrow^* v$ の導出に関する帰納法で示す。$e \rightarrow^* v$ の導出の最後の規則が (C-Ref) だった場合は、$e = v$ だから、$e \rightarrow^* v'$ の導出の最後の規則も (C-Ref) なので、$e = v'$ つまり $v = v'$。$e \rightarrow^* v$ の導出の最後の規則が (C-Step) だった場合は、ある e' が存在して $e \rightarrow e'$ かつ $e' \rightarrow^* v$ なので、$e \rightarrow^* v'$ の導出の最後の規則も (C-Step) で、ある e'' が存在して $e \rightarrow e''$ かつ $e'' \rightarrow^* v'$。ここで上の 3. が成り立つから $e' = e''$。よって帰納法の仮定より $v = v'$。

氏名: ______________________　学籍番号: ______________________